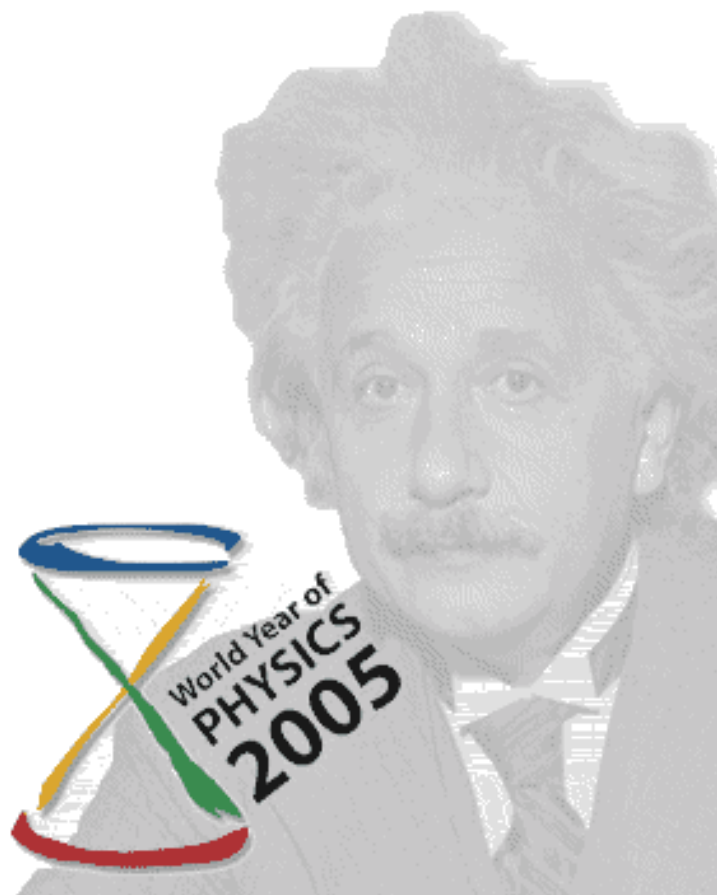


GRAVITAÇÃO: DE NEWTON A EINSTEIN

Afranio Rodrigues Pereira
Departamento de Física, Universidade Federal de Viçosa,
36570-000, Viçosa, MG



Texto usado em “mini-cursos” apresentados em lato-Sensu na área de Ensino de Física na Universidade Federal de Viçosa (UFV) durante os anos de 2002 e 2003. Esse texto foi também utilizado como parte de um tópico especial para alunos do curso de Licenciatura e Bacharelado em Física da UFV em 2000.



O ano de 2005 foi escolhido, pela ONU, como o Ano Internacional da Física (World Year of Physics - WYP-2005). Tal escolha foi baseada na celebração do centenário dos trabalhos de Einstein, publicados em 1905. Esse texto foi elaborado com o intuito de divulgar um pouco da obra de Einstein a professores de ensino médio de algumas regiões do estado de Minas Gerais. Fizemos um resumo sobre algumas aulas ministradas em lato-Sensu em ensino de Física na UFV. Os temas tratados são: gravitação de Newton a Einstein e a geometria de Euclides a Riemann. Os dois assuntos, gravitação e geometria, têm uma estreita relação e são tratados nos currículos do ensino médio em todo o Brasil.

GRAVITAÇÃO: DE NEWTON A EINSTEIN

1. Introdução

De todas as forças da natureza (existem apenas quatro forças) a gravitacional é a menos entendida, apesar de ter sido a primeira a ser pesquisada e estudada matematicamente. Foi o Físico inglês Isaac Newton no século XVII, o primeiro a desvendar alguns dos segredos desta interação que ocorre com objetos tão espetaculares como galáxias, estrelas, planetas, cometas, pessoas, maçãs, pedras, átomos, elétrons etc. A força gravitacional é a única que se manifesta com todas as coisas existentes no Universo e, portanto é uma força universal. Newton nos mostrou como esta força se manifesta através de uma lei que podemos enunciar da seguinte maneira: “matéria atrai matéria na razão direta do produto de suas massas gravitacionais e na razão inversa do quadrado da distância que as separa”. Analisando este enunciado, algumas coisas nos chamam a atenção. Primeiro, devemos saber o que é massa gravitacional que simbolizaremos por m_g para então podermos entender a lei. Tal massa vem a ser uma propriedade intrínseca de todos os corpos materiais e sua medida está relacionada à sua capacidade de atrair outros corpos. Note que segundo a lei, quanto maior a massa gravitacional de um objeto, maior a sua capacidade de atrair gravitacionalmente outros objetos. Ao mesmo tempo, você aprendeu no seu curso de Física do ensino médio ou mesmo nas disciplinas básicas de um curso de graduação na área de ciências exatas, que uma força produz uma aceleração nos objetos materiais e esta aceleração depende de uma massa inercial m_i também intrínseca a todo corpo, através da lei de movimento $\vec{F} = m_i \vec{a}$. A princípio, a massa inercial não tem nada haver com a massa gravitacional, pois a primeira está relacionada à capacidade que os corpos materiais tem de resistir a uma mudança no seu estado de movimento (por isto o nome massa inercial) enquanto a segunda está relacionada à capacidade dos corpos de se atraírem mutuamente. No entanto, o próprio Newton notou uma coisa espantosa. As duas massas são iguais! Este fato notável torna a gravitação um fenômeno puramente geométrico, pois o movimento dos corpos em um campo gravitacional não irá depender de suas massas, pelo simples fato delas serem canceladas nas equações, já que são iguais. É fácil perceber isto através de um fenômeno muito simples que você já deve ter observado milhares de vezes. Considere uma pedra caindo ao ser atraída pela Terra. Desprezando a resistência do ar, a única força que atua sobre a pedra é a força de atração gravitacional da Terra dada por $m_g \vec{g}$, onde $\vec{g}$ é a aceleração da gravidade. Pela lei de movimento, a força resultante é $\vec{F} = m_i \vec{a}$. Logo $m_i \vec{a} = m_g \vec{g}$ e visto que $m_i = m_g$ segue que $\vec{a} = \vec{g}$ e portanto a aceleração de todos os corpos em um campo gravitacional é independente de sua massa. Desta forma, a trajetória de todos os corpos em um campo de gravidade devem ser iguais, dependendo apenas das condições iniciais. Mas a aceleração está relacionada ao espaço e ao tempo e sendo o espaço descrito pela geometria, segue que a gravidade é um fenômeno geométrico. Para Newton, o espaço era descrito pela geometria Euclidiana (o nome é devido ao matemático grego Euclides). Esta geometria, você já teve oportunidade de estudar tanto no ensino fundamental quanto no ensino médio. No fundamental você estudou a geometria Euclidiana plana (bidimensional) e no ensino médio, a geometria espacial (tridimensional). E é aqui que cabe uma segunda observação sobre a lei

de gravitação universal de Newton. Note que matéria atrai matéria, mesmo sem nenhum contato entre elas. É assim que o Sol mantém a Terra em sua volta mesmo estando milhares de quilômetros de distância. Se não existisse esta força misteriosa que atua à distância, a Terra e o Sol seguiriam caminhos independentes e pela lei da inércia, tais caminhos seriam linhas retas, já que Newton assumia que o espaço tinha uma estrutura Euclidiana. Obviamente, não é isto que acontece, pois a Terra segue uma trajetória curva, uma elipse para ser mais preciso, e foi este fato observacional que levou Newton a postular uma força de gravitação que atua à distância. Note que para “salvamos” o espaço Euclidiano (onde a linha reta é a menor distância entre dois pontos) devemos postular uma força que atua à distância e faz com que os corpos sigam trajetórias que não são linhas retas.

Apesar da teoria de Newton ter tido um sucesso extraordinário, explicando muitos fatos e mesmo prevendo fatos novos, ela não é uma teoria correta da gravitação. Ela falha na explicação de vários fenômenos e alguns de seus insucessos fizeram com que Einstein propusesse uma nova teoria da gravidade. O ponto chave para Einstein foi exatamente a equivalência entre massa inercial e massa gravitacional. Lembre-se que esta equivalência torna a gravidade um fenômeno puramente geométrico. Einstein pensou então diferente de Newton. Para Einstein não existia uma força de atração gravitacional que atua à distância. Os planetas estão livres no espaço em volta do Sol e a Terra também não exerce nenhuma força sobre você ou sobre a maçã em queda. Mas o que mantém os planetas em volta do Sol e nós presos à Terra? Segundo Einstein, o próprio espaço (e o tempo como enfatizaremos mais tarde) é o responsável por tudo isto! Como o espaço poderia manter-nos presos à Terra e os planetas ligados em torno do Sol em trajetórias curvas se a menor distância entre dois pontos é uma linha reta? Você pode argumentar baseado na lei da inércia que se um corpo está livre em um espaço Euclidiano, ele deve seguir uma linha reta e não trajetórias curvas! Mas a resposta de Einstein seria: quem te garante que o espaço tem uma estrutura Euclidiana? Lembre-se que Newton, ao assumir uma estrutura Euclidiana para o espaço, teve que introduzir uma força de gravidade que atua à distância! Einstein rejeita esta força à distância, mas à custa de negar que o espaço tenha uma estrutura Euclidiana. Para Einstein, a menor distância entre dois pontos no espaço em nossa volta não é uma linha reta, mas uma curva e assim, o planeta livre de forças segue uma trajetória curva porque o espaço é curvo (esta teoria é conhecida como Relatividade Geral ou Geometrodinâmica). Na realidade, todos os corpos que estão em campos gravitacionais estão no estado de inércia (isto é, livre de forças). No entanto, eles não descrevem trajetórias retilíneas porque o espaço à sua volta é curvo. Mas o que causa a curvatura do espaço? E o que acontece com o tempo? Veremos que na realidade, o tempo também é encurvado e o causador desta curvatura do espaço-tempo é a presença de matéria e energia.

Apesar de ser um grande avanço na compreensão do macro-universo explicando fenômenos que a teoria de Newton não conseguia justificar e prevendo fatos novos (como por exemplo, a possível existência de buracos negros), a teoria de Einstein da gravitação, também conhecida pelo nome de Relatividade Geral, não nos diz muita coisa sobre o papel que a gravidade desempenha no microcosmo. É claro que uma compreensão mais satisfatória do Universo implicaria num melhor entendimento do microcosmo, e é este o objeto de estudo da Física Quântica, uma parte da Física que começou no início do século XX, sendo uma das teorias mais precisas criadas até hoje. No

entanto, uma união entre a Relatividade Geral e a Mecânica Quântica ainda não foi realizada pelos Físicos e este é o motivo de não entendermos bem a gravitação. Esta união é um dos grandes desafios da Física Moderna. Uma das conseqüências desta união implicaria no não desaparecimento da massa nas equações, em contraste com o fenômeno puramente geométrico da Física de Newton e Einstein (também chamada de Física Clássica para uma distinção com a Física Quântica). No entanto, não iremos nos ater a estes detalhes neste resumo e consideraremos apenas os detalhes clássicos. Para isto precisamos estudar um pouco de geometria.

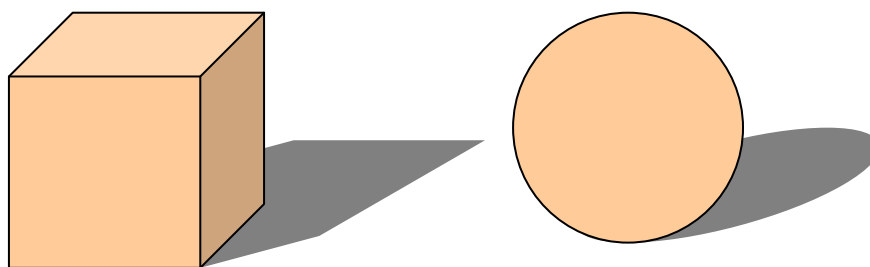


Figura 1. Alguns objetos da geometria espacial (em três dimensões) como o cubo e a esfera.

2. A Geometria Euclidiana

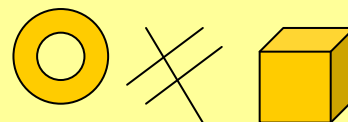
Euclides baseou a construção de sua geometria em 10 axiomas separados por dois grupos: cinco foram classificados como “**noções comuns**” e os outros como “**postulados**”. As “**noções comuns**” parecem ter sido consideradas como hipóteses aceitáveis a todas as ciências ou a todas as pessoas inteligentes, enquanto os **postulados** eram considerados como hipóteses características da geometria. Tudo isto apareceu pela primeira vez no livro escrito por Euclides chamado **Elementos**. Abaixo escrevemos as noções comuns e os postulados.

Noções comuns

1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si.
2. Se iguais são adicionados a iguais, os resultados são iguais.
3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
4. Coisas que coincidem com outras coisas são iguais uma a outra.
5. O todo é maior do que qualquer de suas partes.

Postulados

1. Pode-se traçar uma reta por quaisquer dois pontos.
2. Pode-se continuar uma reta infinitamente.
3. Pode-se descrever uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio.
4. Todos os ângulos retos são iguais.
5. Se uma reta corta outras duas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor que dois retos, então as duas retas, se continuadas infinitamente, encontram-se no lado no qual estão os ângulos cuja soma é menor do que dois retos.



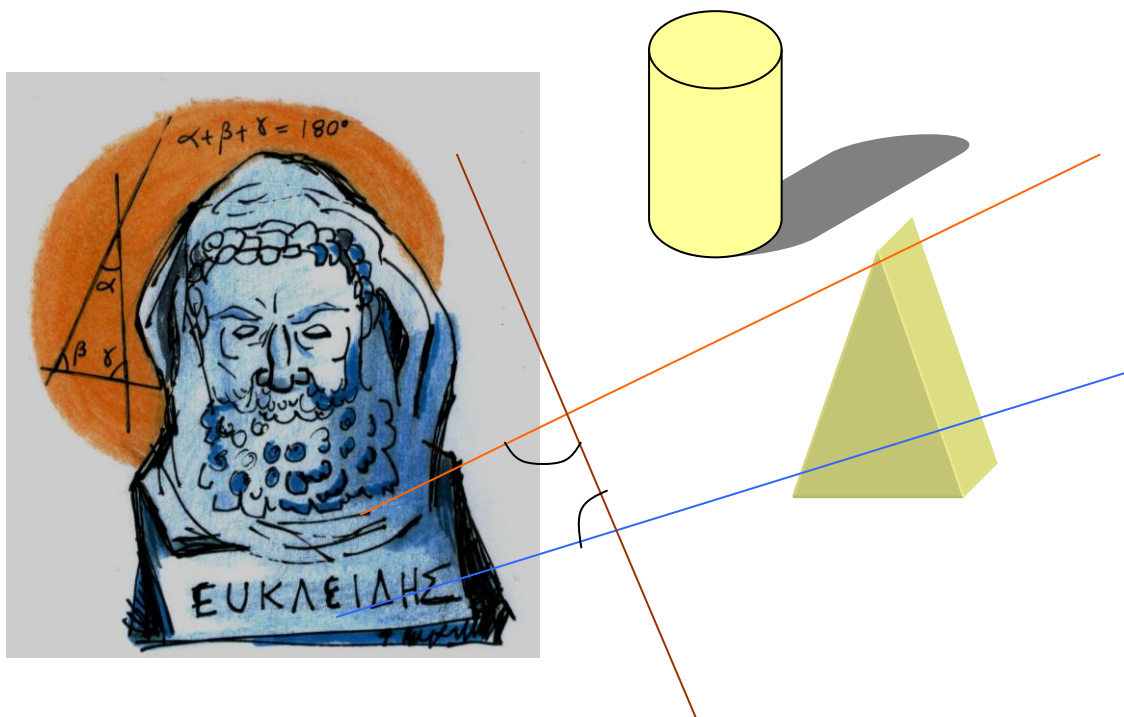
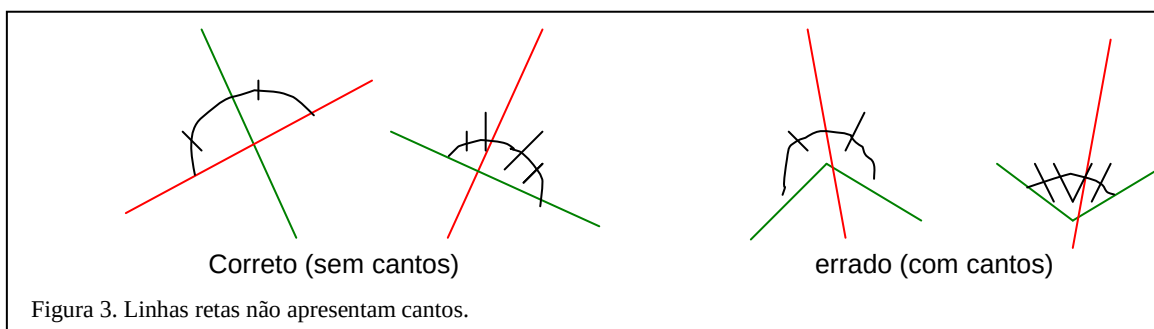


Figura 2. O matemático grego Euclides diante de algumas estruturas geométricas.

De todos os grandes nomes relacionados com Alexandria, o de Euclides é o mais conhecido. Ele foi talvez, o escritor de maior sucesso de todos os tempos, com mil edições de sua geometria tendo sido publicado desde 1482, além de manuscritos de seu trabalho tendo dominado o ensino do assunto por 800 anos antes. Não se sabe muito da vida de Euclides. Evidências indicam que ele nasceu aproximadamente em 365 a.C. e que escreveu os *Elementos* quando tinha uns 40 anos de idade. Mas não se tem informação precisa sobre sua terra natal, datas de nascimento e morte, ou mesmo sua nacionalidade.

O 5º Postulado Há evidências de que os postulados (ver página anterior), particularmente o quinto, foram formulados por Euclides mesmo. Assim, Euclides mostrou em seu *Elementos* como a geometria podia ser deduzida de umas poucas definições, axiomas e postulados. Podemos enunciar o quinto postulado de uma maneira equivalente dizendo: “Dado, em um plano, uma linha L e um ponto P fora de L, então existe somente uma única linha reta que passa por P paralela a L”. Em geral, nós aceitamos os quatro primeiros postulados de Euclides para o nosso espaço. Assim:

1) Aparentemente, parece verdade que dados dois pontos vizinhos, existe apenas um caminho mais curto de um ponto para o outro. 2) Aparentemente, “parece” verdade que não existe contorno para o espaço. 3) Aparentemente, parece verdade que os objetos não possam se expandir ou contrair quando o colocamos em outras posições no espaço (logo, se eu traço uma circunferência com um raio R, ela continuará com esse mesmo raio em qualquer lugar). 4) E aparentemente, parece verdade que nossas linhas retas não apresentam nenhum “canto” (ver figura abaixo). Outra forma de expressar isso é que o quarto postulado diz que espaço é localmente “achatado”. Mas o quinto postulado não é tão fácil de aceitar baseado na experiência comum.



Sabe-se que o quinto postulado tornou-se, de imediato, alvo de críticas pelos matemáticos da época. Este fato não é de estranhar, quando notamos que, primeiramente, ele é bastante diferente, inclusive em tamanho, dos outros postulados, parecendo mais uma proposição do que um axioma; depois, tecnicamente, ele é a inversa de uma das proposições demonstradas nos *Elementos* com base apenas nos quatro primeiros postulados (proposição 27); por último, ele não possui, em nenhum sentido, aquela característica de “*auto-evidência*” que caracterizou inicialmente a escolha dos outros axiomas. Além disso, a sua tardia utilização, após tantas proposições serem provadas sem seu auxílio, levantou suspeita de que ele seria simplesmente uma proposição demonstrável a partir dos outros axiomas a qual Euclides não conseguira demonstrar. Como consequência dessa suspeita, inúmeras tentativas foram feitas para prová-lo ou eliminá-lo através de uma redefinição do conceito de retas paralelas. Entre os nomes famosos dos que tentaram demonstrar o quinto postulado podemos listar Proclus (410-485 a.C.), Nasiradin (1201- 1274), John Wallis (1616-1703), John H. Lambert (1728- 1777), Carl F. Gauss (1777-1855) etc. Estes deixaram nas suas obras referências relevantes sobre o assunto. É, no entanto, certo que todos aqueles interessados seriamente em matemática até o século XVII tentaram eventualmente demonstrar o quinto postulado.

Foi somente na primeira metade do século dezanove que os matemáticos chegaram à conclusão de que o quinto postulado não era demonstrável a partir dos outros quatro. Isto ocorreu com a descoberta das chamadas *geometrias não-Euclidianas em que o quinto postulado de Euclides era substituído por outra afirmação que lhe é contraditória*. Esta descoberta está associada com o nome de dois matemáticos: *Johann Bolyai (1802-1860) e Nikolai I. Lobachewsky (1793-1856)*. Os trabalhos destes dois matemáticos foram elevados às suas devidas proporções por *Friedrich B. Riemann (1826-1866)* que deu início a um segundo período no desenvolvimento das geometrias Euclidiana e não-Euclidiana, um período caracterizado pelas investigações do ponto de vista da geometria diferencial, em contraste com os métodos sintéticos previamente utilizados.

3. Geometrias não Euclidianas

Por vários séculos, muitas pessoas acreditaram que não era possível que o quinto postulado de Euclides fosse falso em nosso espaço. Existiam algumas razões para essa crença. A primeira razão vinha da religião e na idéia de que Deus não teria feito seu trabalho imperfeito. Pensava-se que o espaço era uma coisa divina, de eterna existência e, portanto teria que ser perfeito. Assim, certamente não seria esperado que o espaço apresentasse coleções de linhas retas convergindo e divergindo do tipo requerido para violar o quinto postulado. Outra razão dada a favor de um espaço “achatado” (Euclidiano) veio essencialmente do filósofo Alemão Immanuel Kant. Seu argumento a favor do quinto postulado era de que o espaço é uma criação de nossa própria mente. Então, se não podemos imaginar um espaço não Euclidiano, o espaço deve ser Euclidiano (isto é, deve satisfazer o quinto postulado). Esse argumento é interessante; a idéia é que não podemos ver ou imaginar qualquer coisa que não esteja localizada no espaço. Para Kant, o espaço pode não ter qualquer existência “real”, mas não existe maneira na qual possamos ordenar nosso sentido de percepção sem usar a estrutura do espaço. Bom, mas porquê não deveríamos ser capazes de imaginar um espaço não-Euclidiano? Kant pensava que não poderíamos imaginar tal espaço porque em sua época (por volta de 1780) ninguém o tinha feito. Assim, ele concluiu que nosso espaço deve necessariamente satisfazer o quinto postulado, pois outras possibilidades seriam inimagináveis.

Kant estava errado. Nós podemos imaginar espaços não-Euclidianos. Como um exemplo simples, consideremos sistemas de baixas dimensões tal qual a superfície bidimensional de uma esfera. Vamos ver se o quinto postulado se mantém nesse espaço bidimensional. Primeiro temos que definir o que é exatamente uma “linha reta” sobre a superfície de uma esfera. Obviamente, qualquer linha que esteja contida na superfície da esfera não pode ser “realmente” reta, e nós não podemos “tunelar” através da superfície para produzir linhas retas tal como o diâmetro da esfera (pois tais linhas não se localizam sobre a superfície da esfera). Assim, cabe a seguinte pergunta: qual das linhas que você pode desenhar sobre a superfície da esfera é a mais reta possível? Obviamente, as maiores linhas, tipo o equador ou as linhas de longitude (elas parecem as mais “retas”), enquanto as linhas de latitude parecem curvas. Não existe maneira de se desenhar uma linha mais reta que a linha do equador sobre a esfera.

As linhas sobre uma esfera que chamamos “retas” são denominadas “grandes círculos”. A palavra “grande” aqui significa que não podemos desenhar um círculo maior. Um grande círculo sobre a esfera tem o mesmo raio da esfera. Se existissem seres bidimensionais vivendo nesse mundo e esses seres hipotéticos estivessem caminhando sobre um grande círculo, eles não sentiriam qualquer efeito da curvatura. Eles estão se curvando, mas somente ao longo da direção da “terceira dimensão”, isto é, na direção perpendicular às suas duas dimensões espaciais, e isso eles não poderiam sentir.

Bom, o ponto crucial de tudo isso era conseguir um espaço onde o quinto postulado falhasse. Ele falha sobre a superfície da esfera quando tomamos os grandes círculos como as “linhas retas”, visto que cada grande círculo sempre intersecciona outro. Veja se você consegue desenhar um grande círculo “1” sobre a superfície de uma esfera e um ponto “p” fora de “1”, e então tente encontrar um

grande círculo que passa por “p” e nunca atinja “1” (isto é, um grande círculo paralelo a “1”). Impossível! Basta lembrar que todas as linhas de longitude se encontram nos dois pólos.

Devemos enfatizar que obtivemos a negação do quinto postulado, tomando um espaço curvo e deixando nossas “linhas retas” serem as chamadas “geodésicas” da superfície. Os grandes círculos são as geodésicas sobre a esfera.

Outro aspecto não usual da geometria sobre a esfera é o fato de que o primeiro postulado (pode-se traçar uma reta por quaisquer dois pontos) também não se mantém. É fácil ver que existe um número infinito de grandes círculos conectando os pólos norte e sul da esfera. No entanto, para dois pontos muito próximos só existe uma linha mais reta ligando-os.

4. Comparação simples entre as geometrias de Euclides e de Riemann

Duas linhas retas, inicialmente paralelas, nunca se cruzam sobre uma superfície achatada (plana) tal como a de um plano de papel. Este fato é crucial na geometria Euclidiana e está relacionado ao quinto postulado de Euclides nos Elementos.

Figura 4. Na geometria de Euclides duas linhas retas nunca se encontram.

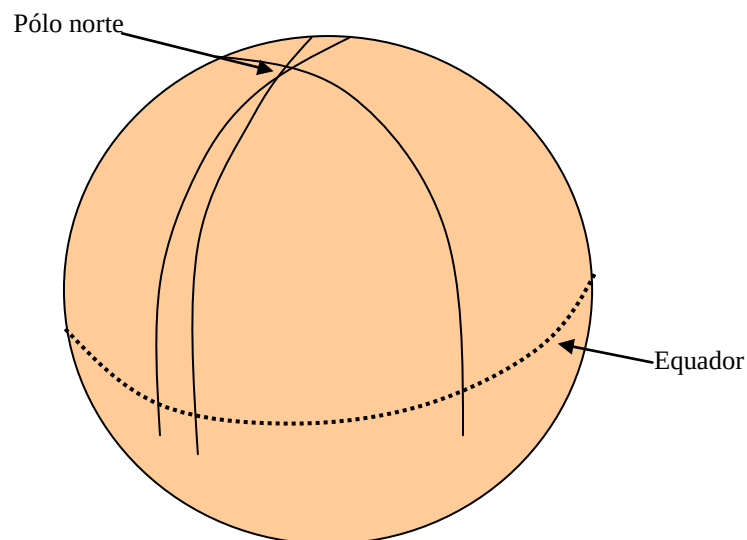
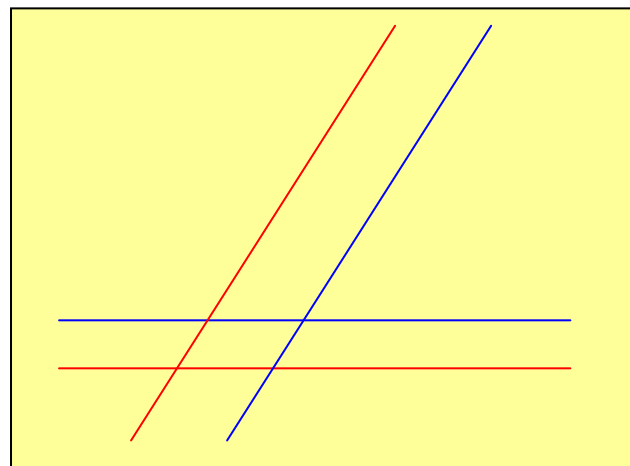


Figura 5. Na geometria Riemanniana, duas linhas retas acabam se encontrando em algum ponto.

Duas linhas retas, inicialmente paralelas, se cruzarão sobre uma superfície curva tal como a superfície de uma esfera. Aqui temos a geometria de Riemann.

Essencialmente, a distinção entre a geometria de Euclides e as geometrias não-Euclidianas está no quinto postulado. Se assumirmos que por um ponto fora de uma linha reta, passa uma única linha paralela à reta dada, temos a geometria de Euclides. Mas se assumirmos que por um ponto fora de uma reta não passa nenhuma reta paralela à reta dada, temos a geometria de Riemann. Podemos ainda assumir que por um ponto fora de uma reta, passam no mínimo duas retas paralelas à reta dada e, portanto, teríamos mais uma geometria não-Euclidiana, chamada de geometria Lobachevskiana, devido ao matemático Lobachevsky.

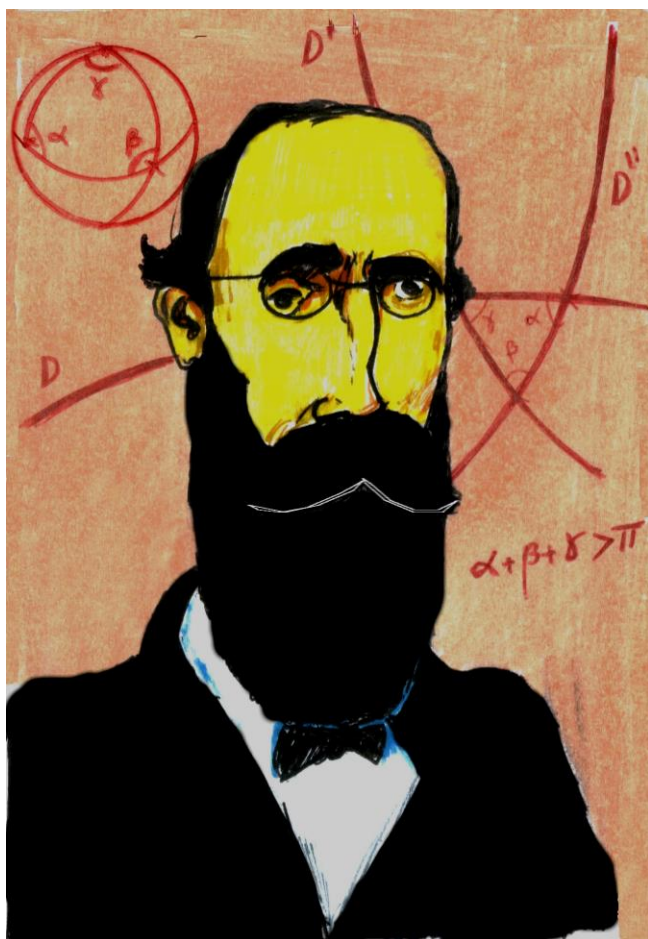


Figura 6. Caricatura do matemático George Friedrich Bernhard Riemann. Em seu livro “On the Hypotheses That Lie at the Foundations of Geometry”, Riemann enfatizava que a verdade sobre o espaço é para ser descoberta da experiência física e não de uma breve lida no livro de Euclides. Na geometria Riemanniana, a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que cento e oitenta graus (ver fundo da figura acima). Na geometria Euclidiana, a soma dos ângulos internos de um triângulo é exatamente cento e oitenta graus (ver fundo da figura 2).

5. A Mecânica Newtoniana e a Estrutura Dos *Principia*

Os *Axiomata sive Leges Motus* são as três leis do movimento, que Newton apresenta no início do livro I dos *Principia*. Porém, as leis são precedidas de oito definições que são necessárias para a compreensão das mesmas. Veja as definições e as leis no quadro abaixo.

Definições:

1. A quantidade de matéria se mede pela densidade e o volume tomados conjuntamente.
2. A quantidade de movimento se mede pela velocidade e a quantidade de matéria tomados conjuntamente.
3. A força que reside na matéria é sua propriedade de resistir, graças à qual qualquer corpo, no que depende dele, permanece no seu estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme (MRU).
4. Uma força impressa é uma ação exercida sobre o corpo, que tende a alterar o seu estado de repouso ou MRU.
5. A força centrípeta é aquela que faz tender os corpos para algum ponto, como se fosse um centro, sendo os corpos empurrados ou puxados ou impelidos de qualquer forma (para o centro).
6. A quantidade absoluta da força centrípeta é a medida da mesma, maior ou menor conforme a eficiência da causa que a propaga a partir do centro, para regiões do espaço que o circundam.
7. A quantidade aceleradora da força centrípeta é a medida da mesma, proporcional à velocidade que ela gera em determinado intervalo de tempo.
8. A quantidade motora da força centrípeta é a medida da mesma, proporcional ao movimento que ela gera em determinado intervalo de tempo.

Leis:

1. Qualquer corpo permanece no seu estado de repouso ou MRU, a não ser que forças impressas atuem sobre ele.
2. A variação do movimento é proporcional à força motora e se produz na direção em que age essa força.
3. A qualquer ação se opõe uma reação igual.

Quanto ao espaço e tempo, Newton assume um espaço absoluto Euclidiano e um tempo absoluto. Newton submeteu seu *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* para a sociedade inglesa de ciências (chamada *Royal Society*) em três volumes em 1686 e 1687. Partindo de umas poucas definições e das três leis do movimento, Newton demonstra rigorosamente uma quantidade surpreendentemente extensa de propriedades relativas aos movimentos de partículas submetidas a várias leis de força. Note que Newton tinha que partir de alguma coisa! Assim, ele introduziu o conceito de massa, força, quantidade de movimento etc, e logo a seguir estabeleceu as leis do movimento. O que Newton fez ao fundar a sua mecânica com o livro “*Principia*”, foi muito parecido com o que Euclides fez ao estabelecer a sua geometria no seu livro “*Elementos*”. Cabe comentar aqui que a definição de massa como aparece nos *Principia* (ver definição 1 no quadro acima) não é correta (ninguém é perfeito!), mas não iremos enfatizar estes detalhes neste resumo. Apenas devemos comentar que a massa (que simbolizaremos por m_i e chamaremos de massa inercial) é uma propriedade que os corpos possuem relacionada à sua capacidade de resistência a uma mudança no seu estado de movimento. Como vemos na primeira lei, todo corpo tende a permanecer no seu estado de inércia (isto é, repouso ou MRU). Para acelerá-lo, você precisa exercer uma força sobre o corpo e conforme a segunda lei, esta força é dada por $\vec{F} = m_i \vec{a}$, onde $\vec{a}$ é a aceleração.

O que deve ficar claro desta discussão é que toda vez que você estava fazendo algum problema de mecânica, no fundo você estava aplicando as definições e as leis de Newton de movimento. Se você acertou o problema, então você aplicou as leis de uma maneira lógica e dedutiva. Se você errou, de duas uma; ou você não entendeu as leis e, portanto não soube aplicá-las,

ou se você entendeu as leis e mesmo assim não acertou, seu conhecimento de matemática precisa melhorar.

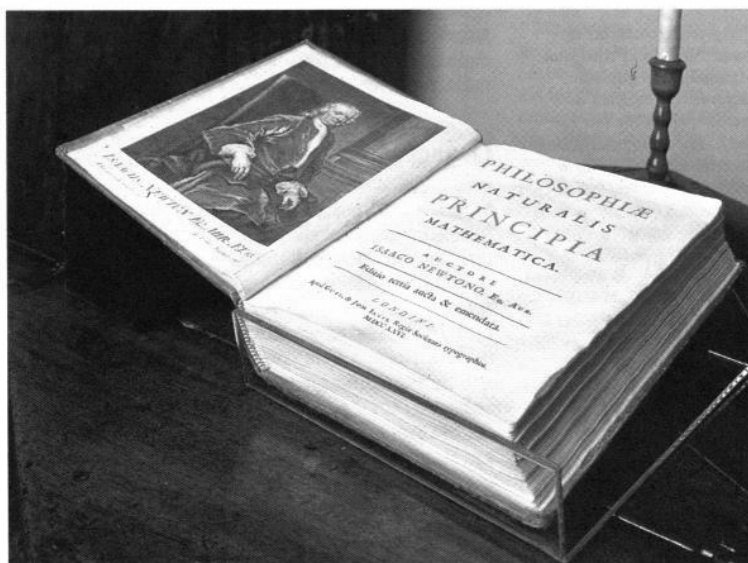


Figura 7. O Físico inglês Isaac Newton e seu livro Principia.

6. A Gravitação Newtoniana

Ainda no livro “Principia”, Newton apresenta a lei da gravitação universal. Esta lei nos diz que matéria tem a propriedade de atrair matéria. Considere dois corpos separados por uma distância d , como mostra a figura na próxima página. Newton notou que esta força de atração diminuía de uma forma muito interessante à medida que a distância aumentava. Para uma distância de 1 metro, a força tinha um valor, digamos 1 unidade de força, mas se a distância dobrasse, a força de atração ficava quatro vezes menor, isto é, $(1/4)$ unidade de força. Isto significa que a força é inversamente proporcional ao quadrado da distância. Matematicamente isto é escrito como $F \propto 1/d^2$, onde o símbolo $\propto$ significa proporcional. Além disto, ele notou que a direção da força é ao longo da linha que une os centros dos dois corpos (ver figura) e que a força que o primeiro corpo faz sobre o segundo é igual e oposta a do segundo sobre o primeiro, isto é, $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. A questão final era saber de onde vem o poder de atração inato aos corpos. Assim, Newton atribuiu aos corpos uma “carga gravitacional”, que denotaremos pelo símbolo m_g , de forma que a lei de força gravitacional deva ser proporcional a esta “carga”. Matematicamente, escrevemos: $F \propto m_{1g} m_{2g} / d^2$, onde m_{1g} é a carga gravitacional do corpo 1 e m_{2g} é a carga gravitacional do corpo 2. Para tornar a proporcionalidade em igualdade, foi introduzida uma constante universal denotada por G de maneira que a lei de força

gravitacional pode ser escrita como $F = G m_{1g} m_{2g} / d^2$. Com a sua lei da gravitação, Newton unificou o movimento da queda de uma maçã com o movimento de um planeta em volta do Sol, ou de uma estrela em volta de uma galáxia, nos mostrando que a causa de todos estes movimentos é uma só; a atração gravitacional mútua de corpos devido às suas cargas gravitacionais intrínsecas. O nome usual desta carga é “massa gravitacional”. Assim é como chamaremos esta quantidade no que segue.

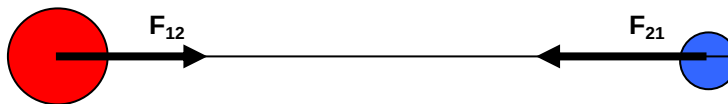


Figura 8. Força central.

6.1 Massa Inercial e Massa Gravitacional

Newton também observou que a massa gravitacional de um corpo (relacionada à atração inata dos corpos) era proporcional a sua massa inercial (relacionada à resistência inata dos corpos a uma tentativa de mudança do seu estado de movimento). Isto é bastante interessante e muito intrigante. Como pode a propriedade de atração gravitacional ter alguma relação com a propriedade de resistência à mudança do estado de movimento? Isto era realmente misterioso, mas era um fato concreto. Assim, Newton postula uma identidade entre massa inercial e massa gravitacional, isto é, assume que $m_i = m_g$. A primeira consequência deste postulado é que a unidade de medida de massa gravitacional é a mesma de massa inercial, como, por exemplo, o quilograma. A segunda consequência é que a trajetória de um objeto deixado “livre” em uma região do espaço contendo gravidade não depende de sua massa e, portanto todos os corpos largados nas mesmas condições iniciais descreverão a mesma trajetória no espaço. Isto nos deixa diante de uma visão geométrica do fenômeno.

6.2 A lei de força de Newton (o inverso do quadrado da distância)

Como consequências da teoria, citaremos alguns fatos interessantes e curiosos. Aconselho-os a procurarem ler tais exemplos com cuidado em seus livros textos. **Alguns Problemas “seculares” são apontados abaixo:**

A) Essa lei justifica todas as 3 leis empíricas de Kepler, mostrando as órbitas possíveis (1ª lei), a conservação do momento angular (2ª lei) e encontrando o valor da constante que aparece na 3ª lei ($T^2/a^3 = 2.97 \times 10^{-19} \text{s}^2/\text{m}^3$ para o sistema solar) em termos de grandezas e constantes fundamentais ($T^2/a^3 = 4\pi^2/GM$).

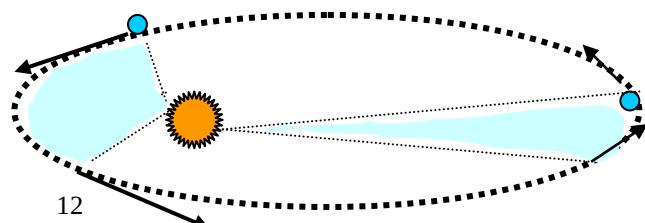


Figura 9. Leis de Kepler.

Devemos enfatizar que a teoria de Newton vai muito além das leis de Kepler na questão das órbitas, pois prevê, não só órbitas elípticas e circulares, mas também parabólicas e hiperbólicas. Além disto, no caso da terceira lei de Kepler, Newton nos dá a constante empírica em termos de G e da massa do corpo central em torno do qual se orbita. Desta forma, com a teoria Newtoniana em mãos, temos um método de se calcular massas de estrelas e planetas. Por exemplo, suponha que você descobriu o décimo planeta do sistema solar e queira saber a sua massa. Siga os seguintes passos observacionais: Primeiro procure encontrar um satélite desse planeta (a sua “lua”). Depois, por meios astronômicos, obtenha a distância “ a ” deste satélite ao planeta que você descobriu. Espere o tempo suficiente para o satélite completar uma volta em torno do seu planeta e você terá o período “ T ”. De posse de “ a ” e “ T ” você poderá usar a expressão Newtoniana $T^2 / a^3 = 4\pi^2 / GM$ e assim obter a massa do planeta “ M ”.

B) Queda do argumento da “centrifugação”, contra o movimento diurno. Este era um problema que “encucava” os físicos e filósofos até a época de Newton, pois eles não sabiam justificar o seguinte fato: se a Terra está em volta do Sol, então para haver dia e noite, ela deveria ter um movimento de rotação. Assim, por que tal rotação não nos atirava para fora da Terra devido aos efeitos centrífugos? Newton mostrou que a força gravitacional era muito mais do que suficiente para nos manter presos à Terra.

C) Explicação do fenômeno das Marés. A teoria Newtonina também foi capaz de mostrar que as marés são causadas por forças gravitacionais que variam com a distância. Veja as figuras na página seguinte. Nela temos o sistema Terra-Lua e mostramos os efeitos da atração da Lua sobre pontos da superfície da Terra. Note que para você que está situado na Terra, estas forças deixam a Terra esticada ao longo do eixo que liga a Terra à Lua e comprimem a Terra ao longo dos eixos perpendiculares. Desta forma o oceano subirá ao longo do eixo Terra-Lua e abaixará ao longo do eixo perpendicular.

A teoria da Gravitação de Newton prevê uma diferença de 53 cm entre o nível da água na maré alta e na maré baixa para o sistema Terra-Lua (o Sol produz também um efeito de aproximadamente a metade desse valor). Para um observador localizado na Terra irá haver um alongamento ao longo da direção paralela ao eixo Terra-Lua e um esmagamento ao longo da direção perpendicular.

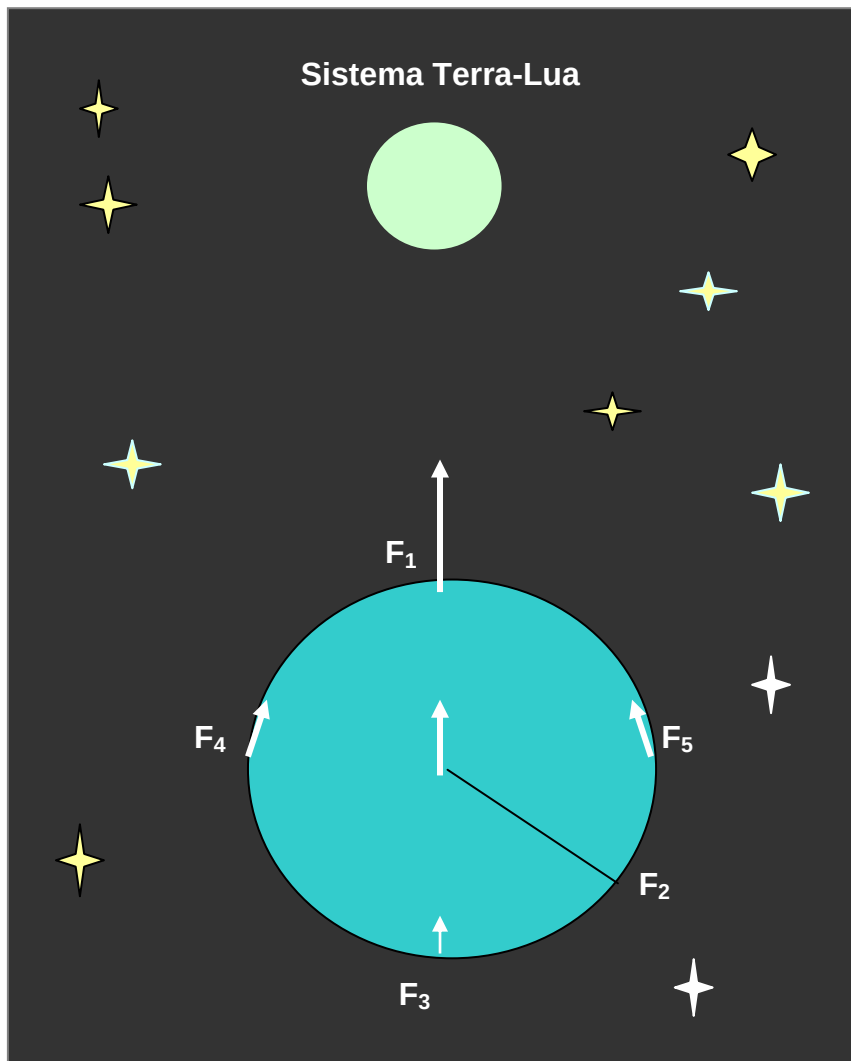


Figura 10. Sistema Terra-Lua e o efeito de maré. Visto que a força gravitacional varia com a distância, a força que a Lua exerce sobre a parte superior da Terra é maior que a força sobre a parte inferior. Isto faz com que a Terra tenha a tendência de se esticar ao longo da direção que a une a Lua. Por outro lado, sendo a força central, a Lua também exerce forças F_4 e F_5 , que tendem a fazer com que a Terra seja contraída ao longo da linha perpendicular à direção Terra-Lua. Este é o efeito de maré.

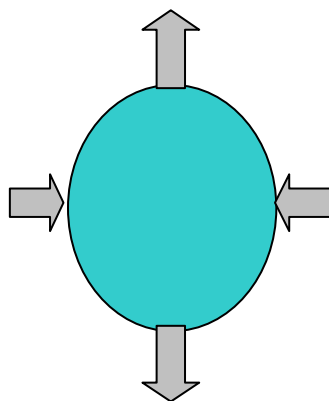


Figura 11. Distorção da terra devido ao campo gravitacional da Lua. Aqui o efeito da distorção foi ampliado.

6.3 Previsões de Fatos Novos.

A) Satelização: quais as órbitas possíveis e como se classificam essas órbitas em relação à energia total E ? Este foi um problema típico em tecnologia no século XX e ainda continua sendo no século XXI, com as corridas espaciais. Fizemos um breve comentário sobre as órbitas possíveis anteriormente. Tais órbitas dependerão da energia do sistema e poderão ser abertas como uma hipérbole ou parábola ou fechadas como uma circunferência ou uma elipse. Com a teoria de Newton, pudemos lançar satélites e controlar suas órbitas.

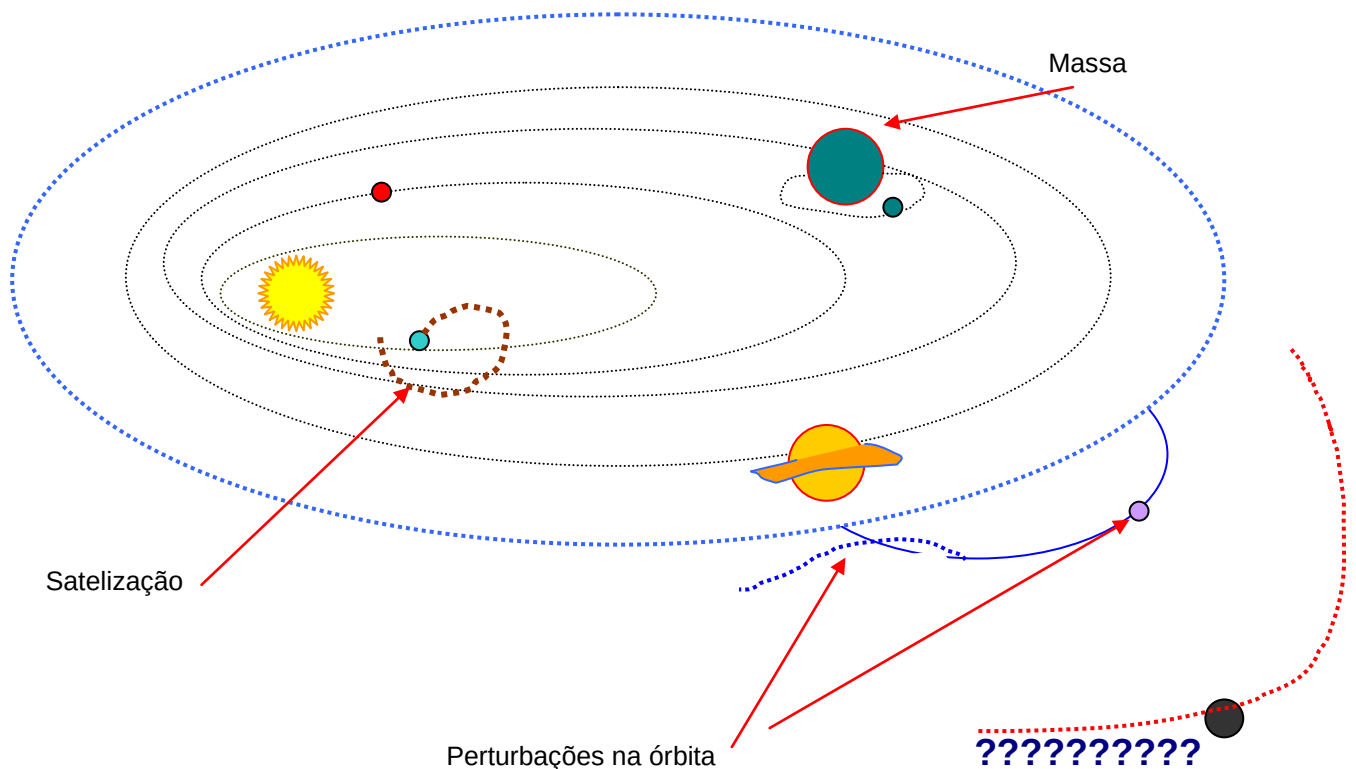


Fig.12. Perturbações devido aos gigantes, Júpiter e Saturno, não eram suficientes para explicar a órbita de Urano. Esse fato fez com que o matemático francês Le Verrier suspeitasse que, além dos gigantes, outro planeta deveria existir e sua localização foi encontrada matematicamente com o uso da Gravitação Newtoniana.

B) Descoberta de novos planetas: Os planetas Netuno e Plutão foram descobertos primeiro pelos cálculos matemáticos usando a teoria Newtoniana e dados de observação acumulados, para depois, seguindo as indicações destes cálculos, serem observados por astrônomos. As figuras nessa e na outra página contam um pouco desta história. O matemático Francês Le Verrier descobriu pelos cálculos (usando a gravitação de Newton), a existência do planeta Netuno. Ele comunica seus resultados à academia de Ciências de Paris em 1846. O novo planeta devia se encontrar a 5° da estrela delta Capricorni. O astrônomo Galle, em Berlin, usando os resultados de Le Verrier interrogou o céu com seu telescópio, na região entre Aquário e Capricórnio, e descobre Netuno a menos de 1° da posição anunciada por Le Verrier.

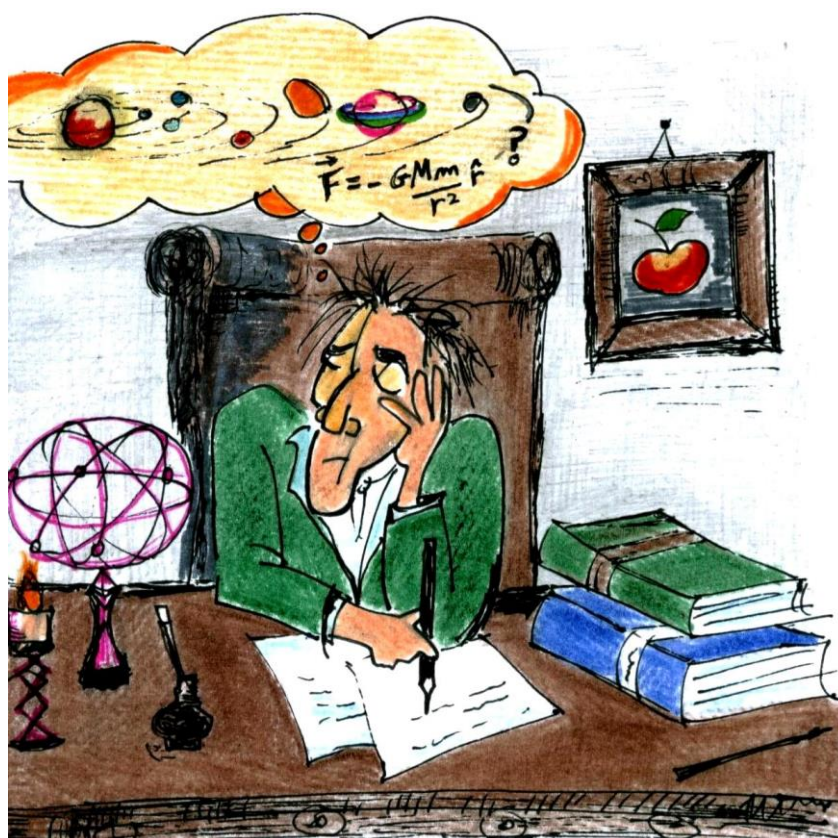


Fig.13. O matemático Francês Le Verrier previu a existência do planeta Netuno sem olhar nenhum telescópio. Usando a teoria Newtoniana da gravitação e de posse de dados observacionais a respeito do movimento de Urano, ele pôde calcular a localização do novo planeta. Usando os resultados de Le Verrier, o astrônomo Galle pôde encontrar Netuno a menos de um grau do local anunciado nos cálculos. O planeta Plutão também foi encontrado dessa forma anos mais tarde.

Enquanto que, por um lado, Le Verrier tenha ajudado a corroborar a teoria da gravitação de Newton com sua previsão e mais tarde com a confirmação (pelo astrônomo Galle) da existência de Netuno, por outro lado, ele também contribuiu para que essa teoria começasse a mostrar pontos fracos. Era conhecido que a órbita de Mercúrio (o planeta mais próximo do Sol) não era uma elipse fechada como previa a teoria de Newton. Tal órbita possuía um movimento de precessão (ver figura na próxima página); mas essa precessão, talvez, pudesse ser explicada pelas perturbações dos planetas vizinhos. Le Verrier mostrou que, mesmo considerando as perturbações causadas pelos planetas vizinhos a Mercúrio, ainda restava uma precessão de aproximadamente 43 segundos de arco por século (terrestre) não justificado. Esse fato foi um dos primeiros a demonstrar que a teoria da gravitação Newtoniana não deveria ser tão perfeita como se imaginava. Um fato experimental observado no século XX também não pode ser explicado por essa teoria: um feixe de luz, ao passar próximo a um campo de gravidade sofre uma deflexão. Essa e muitas outras experiências, realizadas no século XX, irão definitivamente colocar a teoria Newtoniana com o status de teoria aproximada, com validade nos limites de campos gravitacionais fracos e corpos com baixas velocidades.

6.4 Falhas na teoria da gravitação Newtoniana

Em ciência, nem um milhão de experimentos é capaz de comprovar uma teoria, mas apenas um é capaz de “derrubá-la”. Um fato observacional relativamente antigo deixava a gravitação Newtonina sob suspeita. Trata-se do avanço no periélio de Mercúrio. A órbita elíptica de Mercúrio em torno do Sol gira muito lentamente em relação ao sistema conectado ao Sol. A teoria de Newton não consegue explicar um avanço de 43 segundos de arco por século observado experimentalmente.

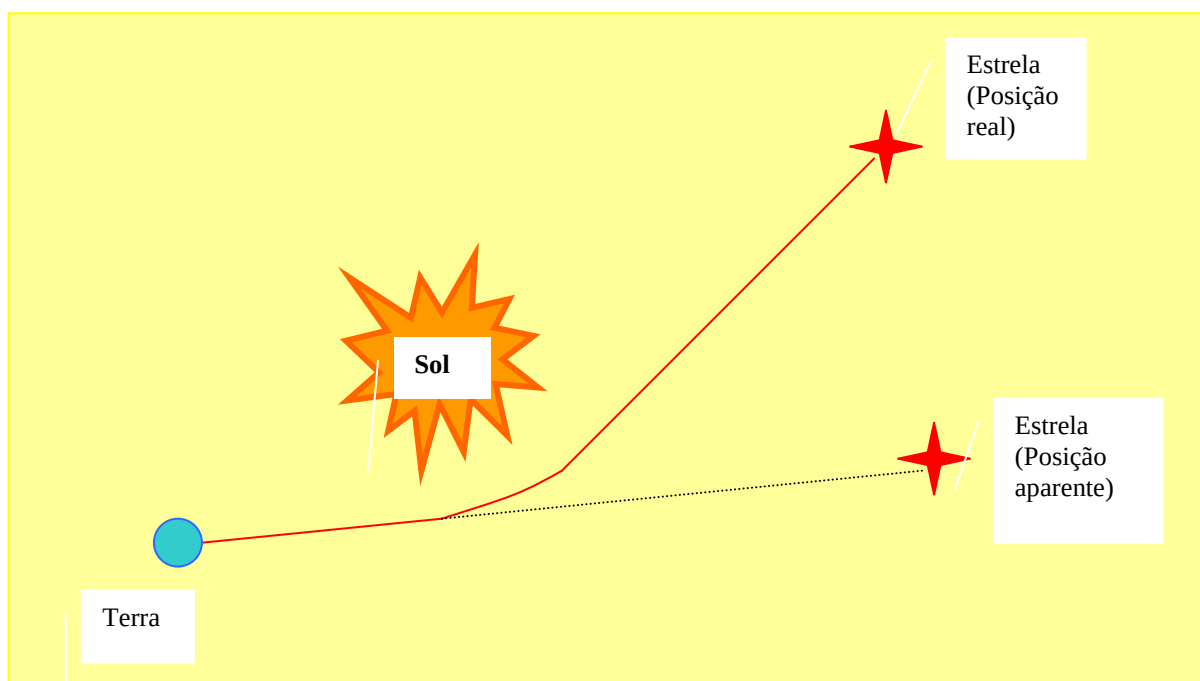
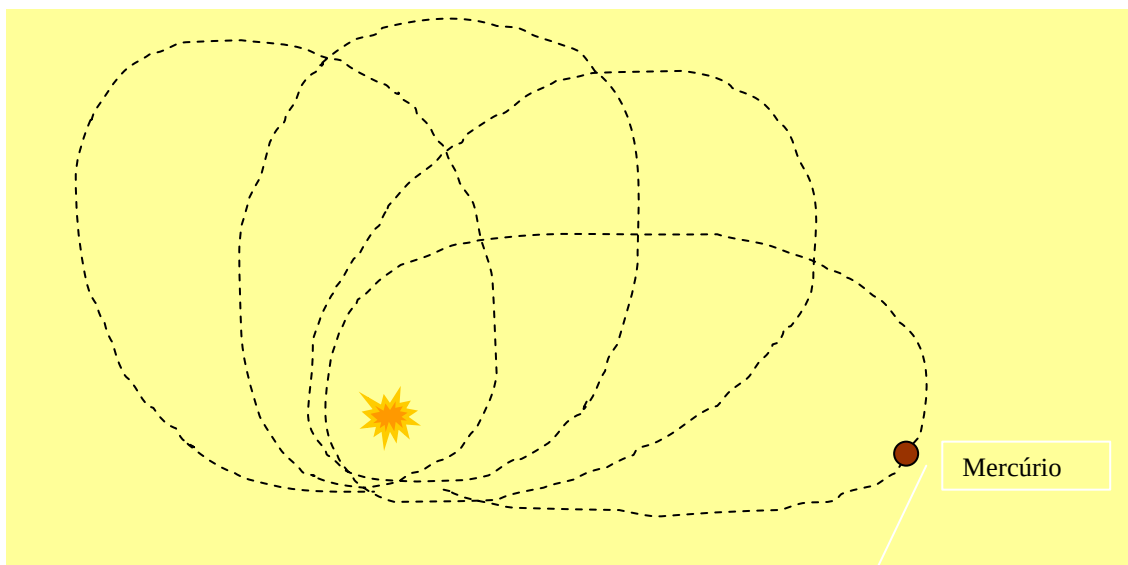


Figura 14. Precessão do Periélio de Mercúrio (quadro acima) e curvatura de um raio de luz em um campo gravitacional (quadro abaixo). A teoria de Newton não é capaz de explicar estes fatos experimentais.

Veremos mais tarde que a teoria da gravitação de Einstein, além de resolver este problema, ainda prevê muitos outros fatos novos, tais como a curvatura da trajetória de um raio de luz em um campo gravitacional e a existência de Buracos negros.

7. A teoria da Gravitação de Einstein

Em 1905, Einstein publicou um artigo com o título “Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento”, no qual ele desbanca os conceitos de espaço e tempo absolutos da mecânica Newtoniana e estabelece o postulado de que todas as leis da física devem ser invariantes sob transformação de Lorentz. Esta invariância se refere à mudança de referenciais inerciais, isto é, aqueles referenciais que estão em repouso ou em MRU. Dizer que as leis da física são invariantes sob uma dada transformação, significa que estas leis não mudam sua forma quando analisada do ponto de vista de observadores que estão em sistemas de referências inerciais diferentes desde que eles levem em consideração tal lei de transformação. Falar sobre este fato envolveria outra aula e, portanto, não daremos muita ênfase a este assunto neste resumo. Mas, só para se ter uma idéia das mudanças no pensamento devido a este postulado, devo lembrá-lo de seu curso básico de mecânica, que as leis de Newton são invariantes sob uma transformação de Galileu, não satisfazendo assim o postulado e a teoria de Einstein, conhecida como Relatividade Restrita ou Especial. Ao forçar a mecânica a obedecer ao postulado da Relatividade Restrita, Einstein mudou completamente os conceitos clássicos de espaço, tempo, energia e matéria. Mostrou que massa e energia são equivalentes através da relação $E = mc^2$ e ainda estabeleceu que nada no universo se mover com velocidade maior que a velocidade da luz. Em outro artigo, também publicado em 1905, Einstein mostra que a luz é constituída de partículas com massa nula (ver quadro abaixo).

Fóton: Sem Massa, Sem Carga (O Fóton de Einstein (1905))

Agora nós nos transportaremos para 1905, o ano da relatividade Restrita. Já estudamos a fórmula da equivalência entre massa e energia, $E = mc^2$: ela relaciona massa a energia e vice-versa. Ela se aplica a todas as coisas do universo que tenham massa. Não existem exceções. Então aqui cabe uma pergunta: existe a possibilidade de “coisas” existirem sem qualquer massa? Na Física pré – Einsteiniana, essa questão não teria o menor propósito; coisas são coisas por causa de suas substâncias, e massa é a substância. Nenhuma massa, nenhuma substância e nenhuma coisa! Alguém poderia falar de coisas se elas não têm massa a ser definida? Na teoria de Einstein da relatividade a resposta é afirmativa. Sim, é verdade que a fórmula acima se aplica somente para objetos massivos; a massa pode ser infinitesimalmente pequena, mas se não é zero, a fórmula se aplica. O preço a se pagar por uma partícula ter massa, mesmo muito pequena, é que tal partícula nunca poderá ser acelerada à velocidade da luz. Coisas com massa podem chegar muito perto dessa velocidade (99.999998%), mas nunca alcançá-la. Ter massa e alcançar a velocidade da luz são coisas mutuamente exclusivas e absolutamente proibidas!

Que tal o inverso dessa situação! É possível alguma coisa existir e que não tenha massa? A relatividade responde afirmativamente, mas com uma condição inalterável. Sim, é possível a existência de uma coisa (significando que ela deva carregar energia e momento) sem qualquer massa, desde que ela satisfaça um duro requerimento: ela existe em movimento perpétuo, movendo somente com uma velocidade, a velocidade da luz. Assim a relatividade apresenta esses dois campos mutuamente exclusivos: objetos sem massa só podem estar em movimento com a velocidade da luz; por outro lado, objetos com massa não nula são incapazes de alcançar a velocidade da luz.

Lembramos que a fórmula acima é um caso particular de uma expressão mais geral: $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$. Assim, se a massa de um objeto é nula, ele pode existir porque carrega uma energia e um momento (note que se o momento também for zero, a energia seria zero e, portanto não teríamos nada!) relacionados por $E = pc$. Logo, uma partícula de massa zero tem obrigatoriamente que ter um momento e, portanto estar em movimento perpétuo! Mais ainda, a partícula deve ser vista em movimento por todos observadores inerciais, não importando a velocidade dos observadores (a partícula, se ela existe para um observador, terá que existir para todos!). Assim, ela só pode se mover à velocidade da luz (não existe referencial de repouso para objetos que se movem à velocidade da luz!). Tendo chegado a estas conclusões, a relatividade se volta para uma questão: qual deveria ser a energia e momento das partículas de massa zero. A teoria não pode nos dizer nada sobre isso. Tal informação terá que vir de outras fontes. A relatividade só nos diz que a idéia de partículas de massa zero é perfeitamente possível, mas não nos dá definições quantitativas para elas. Este não é realmente um conceito da vida diária. Uma partícula sem massa que se move à velocidade da luz é como uma bolinha de gude sem vidro que cruza o espaço à velocidade de 300.000km/s.

Quando Einstein se deu conta dessa possibilidade ele não demorou muito para ver a conexão entre ela e a descoberta de Planck em 1900. Radiação eletromagnética, que por definição se move à velocidade da luz, carregando sua própria energia e momento, vinham em pacotes que podiam ser vistos como unidades indivisíveis de energia dentro de um corpo negro. Imediatamente tudo se fez claro. Para Einstein, o quantum de Planck não era só uma unidade de energia de luz; não, ele era muito mais que isso. Ele era um exemplo perfeito de partícula sem massa: era partícula porque tinha uma unidade básica de energia e momento, e ainda se não tinha massa e sempre se movia à velocidade da luz. Afinal, radiação não tem nenhuma massa e sempre se move à velocidade da luz. Prontamente Einstein batizou os quanta de Planck de “fótons”, e elevou-os à categoria de partículas: se o elétron era a partícula de eletricidade, então o fóton era a partícula de luz. Nenhuma massa, nenhuma carga, mas uma partícula. A metamorfose dos quanta de Planck para os fótons de Einstein foi muito mais que uma mudança de nome; isso representou um grande desvio em nosso pensamento sobre a definição de uma partícula, do que ela é (massa, carga, localização, velocidade etc) para o que ela faz (energia e momento). Com a visão de fótons como partículas sem massa, Einstein mudou de vez a idéia de partícula: uma partícula é agora uma partícula desde que ela se comporte como uma partícula, independentemente dela ter massa ou não.

Lista das propriedades básicas do fóton

Nome Fóton

Símbolo	γ (gama)
Carga	0
Massa	0
Descoberto	1900/1905

Mas esta revolução nos conceitos de espaço, tempo e energia não ficaram apenas nisto. Uma pergunta imediata se fazia necessária: por quê privilegiar os referenciais inerciais e então considerar os sistemas de referência acelerados como inferiores para se observar a natureza? O fato é que desde a época de Newton, os referenciais acelerados sempre foram deixados de lado, pois efeitos “estranhos” acontecem quando estamos localizados em quaisquer desses sistemas. Por exemplo, imagine você dentro de um ônibus. Quando o ônibus acelera, você é atirado para trás. Quando o motorista do ônibus pisa no freio, você é atirado para frente e quando o ônibus faz uma curva, você é jogado para o lado. Deste fato simples e corriqueiro, podemos então perguntar: que força “invisível” e misteriosa é esta que nos atinge e nos acelera quando estamos em algum sistema acelerado? Estas forças são conhecidas como forças centrífugas ou forças de inércia, e só se apresentam em sistemas não inerciais. Portanto, sempre que você estudava algum fenômeno de movimento de um ponto de vista de um referencial como este, você sempre corrigia as leis de Newton (que são validas apenas em sistemas inerciais) acrescentando nas equações alguma força centrífuga. Elas não eram relacionadas a nenhuma interação (como já comentamos, só existem quatro interações na natureza, a saber: interações gravitacionais, eletromagnéticas, fortes e fracas) e assim, não poderiam ser “reais”. Quem ousaria supor que tal impulsão dentro de um ônibus acelerado

é um fato gravitacional? Eletromagnético?! Menos ainda, pois todos os objetos envolvidos são isentos de carga elétrica. Por outro lado, as interações forte e fraca são de curtíssimo alcance e só se manifestam nos núcleos atômicos e, portanto são descartadas para qualquer tentativa de justificativa dos efeitos centrífugos. Então podemos concluir que estas forças presentes em sistemas acelerados são “fictícias”; portanto, tais sistemas seriam “inferiores”? Mas espere um pouco antes de qualquer conclusão. Estes efeitos “estranhos” que se apresentam em referenciais não inerciais são bastante reais e tem a ver com o fato de que todo corpo tende a permanecer no seu estado de inércia, isto é, em repouso ou em MRU. Assim, se você está sentado dentro de um ônibus parado e o motorista resolve acelerar o veículo bruscamente, você é atirado para trás porque seu corpo tende a permanecer no estado de repouso. Em resumo, todos aqueles efeitos que acontecem em referenciais acelerados só acontecem porque os objetos que sentem os efeitos têm uma massa inercial que resiste a uma mudança em seu estado de movimento. Mas, como já vimos, massa inercial e massa gravitacional são equivalentes, o que faz com que a gravidade seja idêntica a uma aceleração. Então por que não extrapolar e dizer que os efeitos observados em referenciais não inerciais são efeitos gravitacionais? De fato, você pode eliminar ou mesmo produzir gravidade com aceleração. Como? Imagine uma pessoa dentro de uma nave que esteja desligada numa região do espaço longe de qualquer estrela ou planeta, ou melhor, longe de qualquer matéria e conseqüentemente, longe de qualquer campo de gravidade. Considere que as paredes da nave sejam feitas de um material tal que quem esteja de fora possa enxergar o que está dentro, mas quem esteja dentro não possa enxergar e mesmo saber o que acontece fora. Obviamente, esta pessoa e tudo mais que estiver dentro da nave estará flutuando sem qualquer sensação de peso. Agora suponha que algum mecanismo faça com que a nave se acelere em determinada direção com uma aceleração de $9,8 \text{ m/s}^2$. Para um observador inercial localizado fora da nave, a pessoa e as coisas dentro da nave continuam em seus estados de inércia, mas a base da nave estará acelerada em suas direções de maneira tal que a base as atingirá em brevíssimo intervalo de tempo (ver figura na página seguinte). Mas a pessoa que está dentro da nave se sentirá caindo na direção da base com uma aceleração de $9,8 \text{ m/s}^2$ e sentirá o choque como se estivesse caindo de uma certa altura na Terra. Também verá todos os objetos que antes estavam flutuando, caindo com uma aceleração que independe de suas massas, isto é, $9,8 \text{ m/s}^2$. Como nosso observador interno não pode ver o que acontece fora da nave, ele terá dúvidas sobre o que mudou tão bruscamente de forma a fazê-lo “cair” e se chocar contra o chão da nave e sentir as dores desta colisão (as dores sentidas pelo nosso observador ao se chocar com o solo da nave são devidas à interação eletromagnética). De duas uma; ou a sua nave foi acelerada a $9,8 \text{ m/s}^2$ ou o planeta Terra apareceu subitamente debaixo de sua nave (obviamente, esta segunda conclusão seria impossível de ser realizada do ponto de vista físico, mas nossas experiências são imaginárias e, portanto assumiremos que isto seja possível). Como nosso observador poderá dizer o que está acontecendo se ele não consegue espiar pelo lado de fora da nave? Se ele fosse um físico, ele tentaria realizar algumas experiências dentro da nave com o intuito de saber. Poderia pegar duas bolas de massas diferentes e largá-las de suas mãos a meia altura. Mas elas cairiam da mesma forma tanto na sua primeira hipótese (a nave foi acelerada) quanto na segunda (a Terra apareceu

subitamente). De fato, em praticamente todas as experiências físicas realizadas pelo nosso observador, ele não poderia distinguir entre a primeira ou a segunda hipótese.

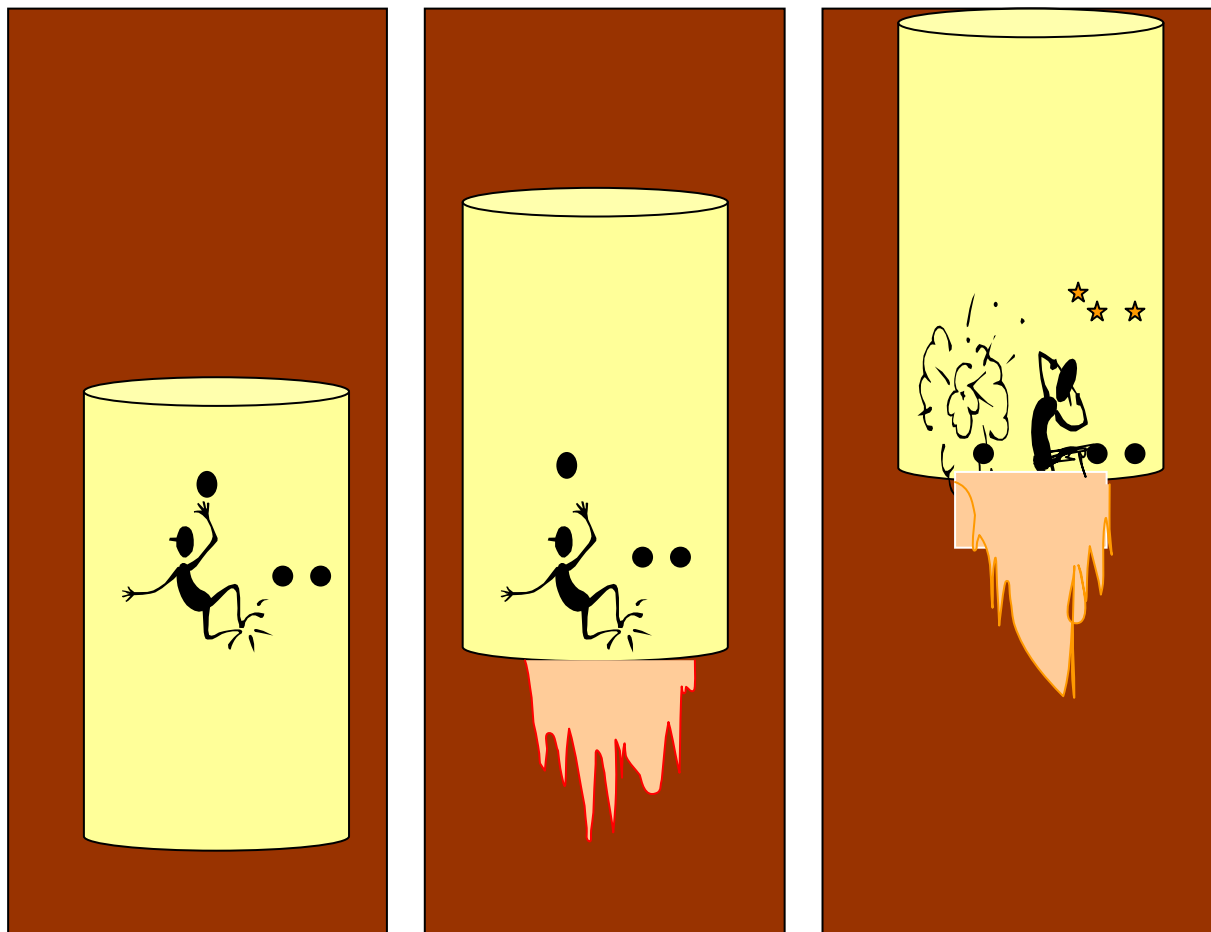


Figura 15. Um observador em uma nave espacial.

Note que enquanto o observador externo vê a pessoa e as coisas dentro da nave permanecer em seus estados de inércia até que a base da nave os atinja, a pessoa interna à nave pode concluir (mesmo que de uma maneira não definitiva) que um campo de gravidade apareceu subitamente na região exterior. Novamente, inércia e gravidade se apresentam como equivalentes (lembre-se da massa inercial e da massa gravitacional!). Se o estado de inércia e a gravitação são a mesma coisa, fica claro que não existe nenhuma força de gravidade que atua à distância como proposto por Newton. Assim, os planetas, a lua, a maçã em queda etc, só estão em seus estados de inércia. Como então explicar que estes objetos não estão em MRU? Voltaremos a este assunto mais tarde. Por enquanto podemos então estabelecer a partir de nossa experiência imaginária, uma equivalência entre sistemas de referencia acelerados e um campo de gravidade homogêneo. Se esta equivalência

é realmente um princípio físico, só a natureza pode responder! Parece que nenhum experimento o negou até agora. O único problema para esta interpretação é o fato de não existir na natureza nenhum campo de gravidade homogêneo, pois como já vimos, campos gravitacionais variam com a distância. Por isto, o enunciado de que um campo gravitacional homogêneo é equivalente a um referencial acelerado é conhecido como “princípio da equivalência fraco”. Uma maneira menos fantasiosa de enunciarmos a mesma coisa sem cairmos na abstração é dizer que massa inercial e massa gravitacional são iguais (“princípio da equivalência forte”). Com a idéia de referenciais acelerados, Einstein deu um pulo na compreensão do maior mistério da gravitação Newtoniana, que era exatamente esta identidade entre massa inercial e gravitacional. Desta forma, podemos ir ainda mais longe dizendo que um referencial acelerado é também um referencial inercial, mas com um campo gravitacional homogêneo em sua região espaço-temporal. Foi mais ou menos assim que começou a surgir uma nova teoria da gravitação conhecida como relatividade geral. Com esta idéia, Einstein publicou um artigo em 1911, chamado “Sobre a Influência da Gravidade na Propagação da Luz”, mostrando que um raio de luz deve se encurvar ao passar perto de um corpo de enorme massa tal como uma estrela. Neste artigo, seu resultado para o ângulo de deflexão não foi correto (para ser mais preciso, Einstein encontrou no artigo acima referido, a metade do valor real), pois ele ainda não tinha estabelecido a teoria correta para a relatividade geral, o que veio a ocorrer por volta de 1917.

Voltemos a uma pergunta que deixamos para trás. Ora, se gravitação e inércia são a mesma coisa, como então os planetas e outros corpos ao redor do Sol não estão em MRU? Por que uma maçã ao deixar sua árvore ou qualquer objeto em queda acelera em direção à Terra? A resposta está na natureza do espaço, ou melhor, do espaço-tempo. Novamente a geometria se faz necessária. Vimos que Newton assumia o espaço em nossa volta como sendo Euclidiano e para “salvar” esta ideia, ele teve que pagar um preço, a saber, introduzindo uma força à distância que atuava entre corpos materiais. Com as idéias expostas anteriormente, Einstein “enxerga” o fenômeno gravitacional de forma diferente, pois encara inércia e gravidade como equivalentes e, portanto descarta qualquer força de gravidade. Na visão de Einstein, tanto os planetas, a maçã ou qualquer outro corpo em uma situação envolvendo gravidade, estão na realidade em seus estados de inércia. Eles não ficam em MRU simplesmente porque o espaço no qual se movem é curvo. Mais precisamente, o espaço-tempo é curvo, e dita à matéria como se mover. Um objeto material sempre seguirá neste espaço-tempo curvo uma trajetória geodésica indo de um ponto a outro através do menor “caminho”. Mas você pode querer argumentar que quando atiramos objetos aqui na Terra com diferentes velocidades iniciais, eles descrevem diferentes curvaturas no espaço. Então como pode ser o espaço que está ditando aos objetos suas trajetórias, se cada um segue caminhos diferentes? Mas eu disse que a curvatura é do espaço-tempo, não apenas do espaço, e você deve lembrar que velocidade envolve o tempo e, portanto a resposta à sua pergunta é a seguinte: se você atirar objetos aqui na Terra ou em qualquer outro lugar com velocidades iniciais diferentes eles seguirão a mesma trajetória no “espaço-tempo”. A figura abaixo esclarecerá melhor a resposta.

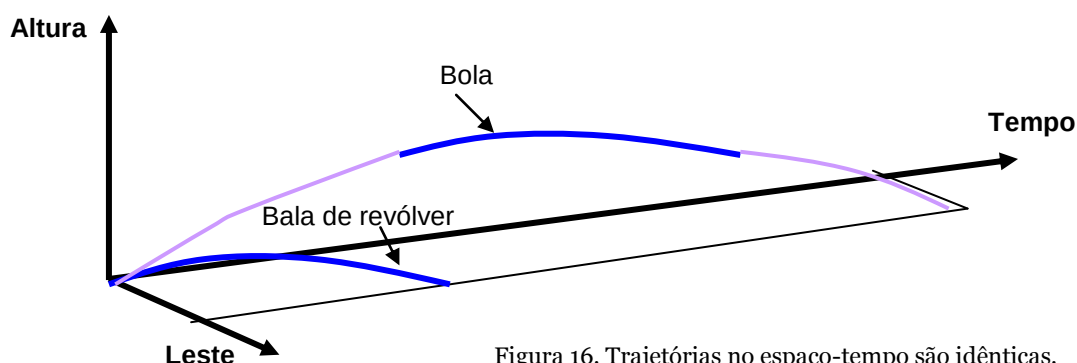


Figura 16. Trajetórias no espaço-tempo são idênticas.

Os traços deixados por uma bola de tênis jogada em uma sala e de uma bala de revólver que saiu de um tiro através da mesma sala parecem ter curvaturas muito diferentes. A bala de revólver parece seguir um caminho muito mais reto. Naturalmente, isto é porque visualizamos os traços em três dimensões espaciais e ignoramos a dimensão “tempo”. Mas, se fizermos um gráfico dos traços em duas dimensões espaciais (o movimento de projeteis é planar e assim podemos considerar um movimento de baixo para cima e de oeste para leste) e uma dimensão temporal, vemos que na realidade, o grau de curvatura dos dois traços é idêntico (ver figura acima). Em resumo, todos os corpos estão no estado de inércia em campos gravitacionais e, portanto seguem a mesma trajetória (uma geodésica) no espaço-tempo, e tais trajetórias não são linhas retas porque são impostas pela curvatura do espaço-tempo. Como diria John Archibald Wheeler: Gravidade é uma ilusão! Quando estamos em queda, ou melhor, “vôo livre”, nenhuma força existe sobre nós. A única coisa que pode nos manter fora da condição de “vôo livre” é a força do chão sobre nossos pés (que por sinal é de origem eletromagnética).

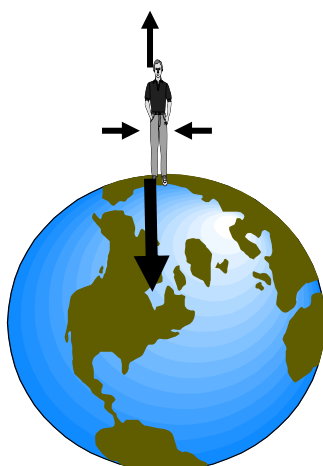
Mas o que causa a curvatura do espaço-tempo? Ora, quem sente os efeitos deve também ser a causa. Assim, a própria matéria deve ser a causadora desta curvatura. Como matéria e energia são equivalentes, podemos ser mais precisos dizendo que a fonte da curvatura do espaço-tempo é matéria e energia. Desta forma, visto que tudo que existe no universo é matéria-energia, segue que tudo deve gravitar. Por exemplo, luz deve torcer o espaço-tempo e também sentir uma influência da curvatura do espaço-tempo. Realmente, um raio de luz sofre uma deflexão ao passar perto de uma estrela ou um corpo de massa muito grande.

A teoria de Einstein também mostra que as órbitas dos planetas sofrem avanço no periélio e este avanço calculado pela Relatividade Geral para o planeta Mercúrio é de exatamente 43 segundos de arco por século. No caso dos outros planetas do sistema solar este avanço é desprezível, pois os campos gravitacionais a que estão submetidos são bem mais fracos por estarem longe do Sol. Este caso nos mostra que a teoria de Newton é um caso particular da Relatividade Geral, sendo válida apenas para campos gravitacionais fracos. Além disto, na gravitação Newtoniana, as velocidades dos corpos “gravitantes” têm que ser pequenas comparadas com a velocidade da luz.

Já que estamos falando de espaço-tempo curvo, devemos então perguntar: qual a geometria que descreve o espaço-tempo? Como vimos anteriormente, as marés eram causadas pela presença da Lua e do Sol. No fundo, todos nós estamos sentindo efeitos semelhantes e que podem ser explicados facilmente notando que quando estamos em pé sobre um planeta, a “força gravitacional”

sobre nossos pés é maior que a “força” sobre nossas cabeças, pois o campo cai com o inverso do quadrado da distância ao centro do planeta. Assim, teríamos a sensação de sermos esticados ao longo de nossa vertical. Além disto, somos também espremidos pelos lados devido a estas mesmas “forças de maré”. Se a massa deste planeta não for muito grande, como é o caso da Terra, estes efeitos são muito pequenos, mas existem apesar de imperceptíveis. Veja na figura abaixo, o que acontece com uma pessoa devido a estes efeitos os quais chamaremos de “efeitos de maré”.

Figura 17. Efeitos de Maré sobre um observador na superfície da Terra.



À medida que você cai na direção da Terra, as forças de Maré te esticam ao longo da direção que vai do seu pé à sua cabeça e te esmagam pelos lados. Considere a figura da página seguinte. Duas bolas atiradas no ar com trajetórias precisamente paralelas, se fossem capazes de passar pela Terra sem serem impedidas (pela interação eletromagnética), iriam se encontrar no centro da Terra.

À medida que as bolas caem em direção a Terra, as forças de maré da Terra as empurram pelos lados, aproximando-as da mesma maneira que elas espremem seus lados, quando você está sobre um planeta. Os valores dessas forças são suficientes para fazer as bolas se encontrarem quase que precisamente no centro da Terra. Agora vem o desfecho desse experimento imaginário: cada bola se movia ao longo de linhas precisamente retas (geodésicas) através do espaço-tempo. Inicialmente as 2 linhas retas eram paralelas. Mais tarde elas se cruzam (as bolas colidem). Esse cruzamento das linhas retas inicialmente paralelas assinala uma curvatura do espaço-tempo. Do ponto de vista de Einstein, a curvatura do espaço-tempo é a causadora do cruzamento, i. e., causadora da colisão das bolas, exatamente como duas geodésicas se cruzam sobre a superfície de uma esfera. Para Newton, as forças de maré é que são as responsáveis. Portanto, a curvatura do espaço-tempo pode ser indicada e até quantificada pelos efeitos de maré. Notamos que neste espaço não existem retas paralelas, pois se espichadas, em algum lugar acabariam se encontrando. Assim, a geometria de Riemann é a mais apropriada para descrever o espaço-tempo.



Figura 18. Note que duas retas “paralelas” (em princípio) no espaço ao redor da Terra acabam por se encontrar. A geometria adequada a este espaço é a de Riemann.

A teoria da Relatividade Geral, também conhecida por Geometrodinâmica pode ser resumida da seguinte forma: matéria-energia diz ao espaço-tempo como se curvar, e o espaço-tempo, por sua vez, diz à matéria-energia como se mover. As equações que descrevem a dinâmica da curvatura do espaço-tempo induzida por determinada distribuição de matéria-energia é denominada Equação de Einstein. Tal equação é mostrada na figura 19 (ou na capa desse texto junto à caricatura de Einstein). O Lado esquerdo da equação contém apenas termos geométricos (como o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, o escalar de curvatura R e a métrica $g_{\mu\nu}$) enquanto o lado direito contém a distribuição de matéria-energia $T_{\mu\nu}$. Para completar a teoria, precisamos da equação de movimento de uma partícula no espaço-tempo descrito pela métrica $g_{\mu\nu}$. Tal equação é conhecida como equação da geodésica. Esta teoria explica muitos fenômenos observados e também prediz fatos novos como, por exemplo, a existência de ondas gravitacionais. Outra característica das equações de Einstein que chama muita

atenção é a previsão da existência de buracos negros. Estes objetos curvam o espaço-tempo a sua volta de uma maneira violenta e muitos esforços vem sendo feito para a sua detecção. Abaixo, mostramos uma das possibilidades para a detecção de buracos negros.



Fig.19. Caricatura de Albert Einstein gravitando (ou surfando ondas gravitacionais).

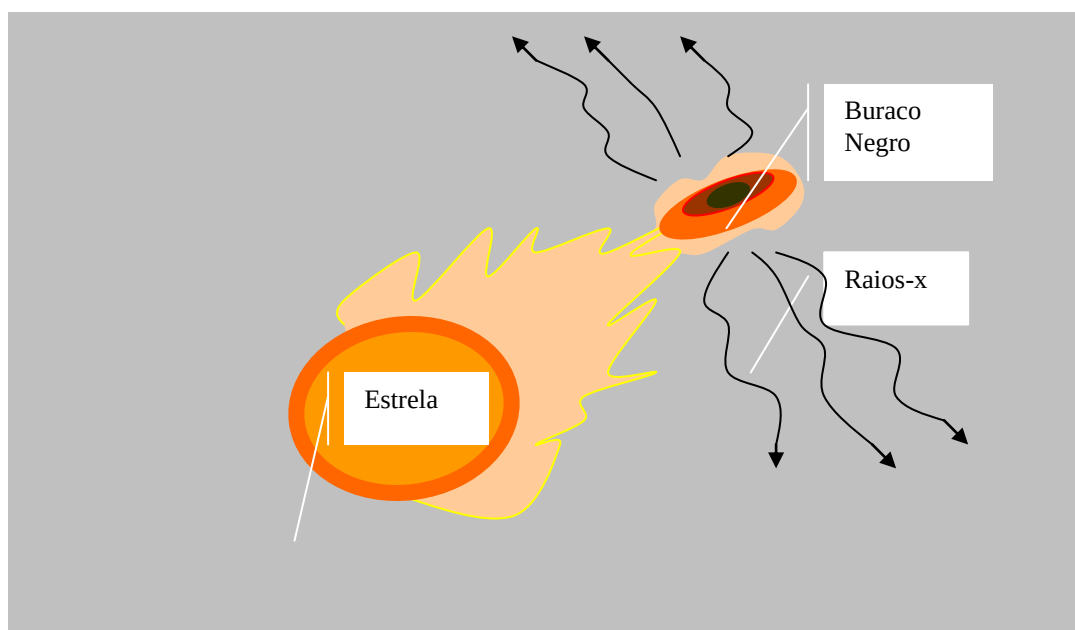


Figura 20. Um buraco negro “engolindo” uma estrela.

8. Breve comentário sobre Cosmologia

Escrever o que nós, seres humanos, sabemos sobre todas as aplicações e ramificações da gravidade tomaria muitos volumes. Assim, na conclusão deste pequeno resumo, faremos alguns

comentários sobre poucos tópicos de fronteira do assunto, apenas induzindo o estudante a pesquisar os temas em livros e artigos.

Igual a Newton, Einstein esperava que o Universo fosse estático e em 1917 ele publicou um artigo com o título “Considerações Cosmológicas sobre a teoria da Relatividade Geral” no qual propõe um modelo de um Universo com curvatura positiva e cuja geometria do espaço era fechada nela mesma e que permaneceria estática por toda a eternidade. Mais tarde ele considerou este modelo como o maior erro de sua vida (embora nem todos os cosmólogos concordem).

8.1 O universo em expansão

A expansão do Universo é um fato conhecido desde 1930, quando Edwin Hubble mostrou que galáxias distantes estão se afastando de nós com velocidades proporcionais a suas distâncias. Esta descoberta recebeu a designação de lei de Hubble. Apesar de estarmos vendo as galáxias se afastando de nós, não importando a direção em que olhamos, isto não significa que estamos em uma posição especial e central no Universo. Em todas as regiões do Universo, este fato seria visto da mesma forma, como mostra o exemplo simples da figura abaixo. Desenhe algumas bolinhas em um balão vazio (mais ou menos equidistantes, para facilitar) e depois encha este balão. As bolinhas que você desenhou representam as galáxias. Note que cada bolinha se encontra no centro de um padrão de bolinhas se expandindo.

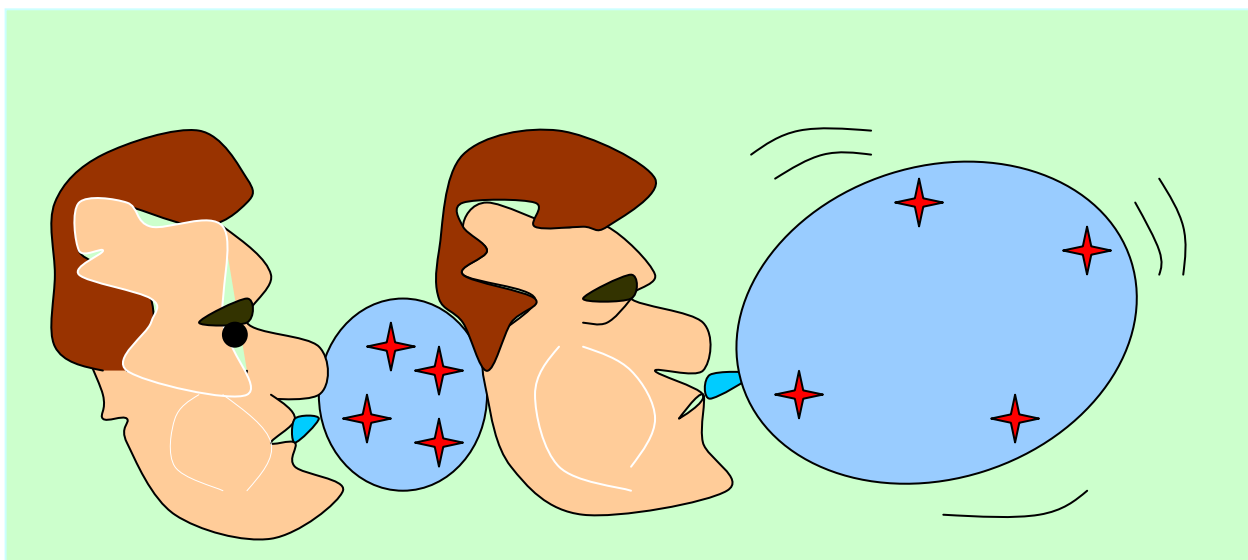


Figura 21. Uma representação da expansão do Universo.

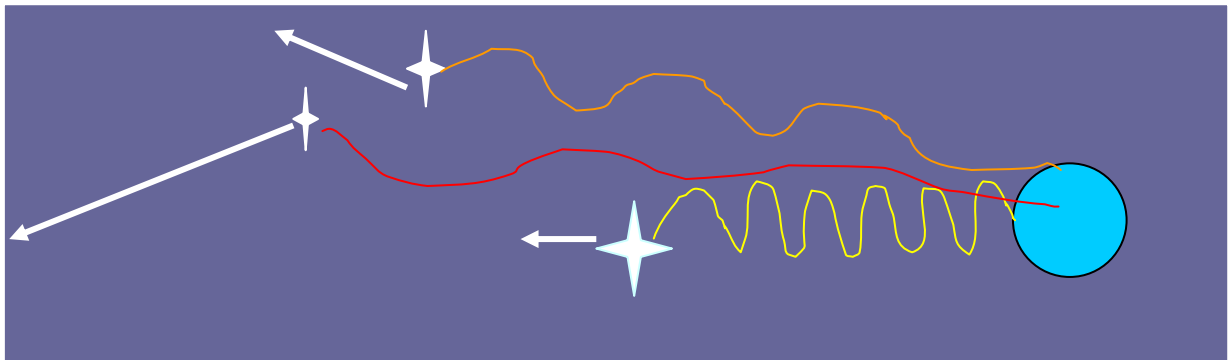
8.2 Modelos Cosmológicos

Um modelo simples do Universo capaz de nos ajudar a discutir seu futuro desenvolvimento é considerar que nosso Universo é isotrópico e homogêneo. Nessa aproximação, a estrutura do espaço-tempo é descrita pela métrica de Robertson-Walker. A dinâmica de como tal Universo evolui é obtida aplicando-se a teoria de Einstein, assumindo que a matéria é um fluido ideal e homogêneo. As equações resultantes nos ajudam a discutir histórias plausíveis e possíveis futuros de nosso Universo. Existem duas possibilidades: ou o Universo irá se expandir para sempre ou irá parar em um

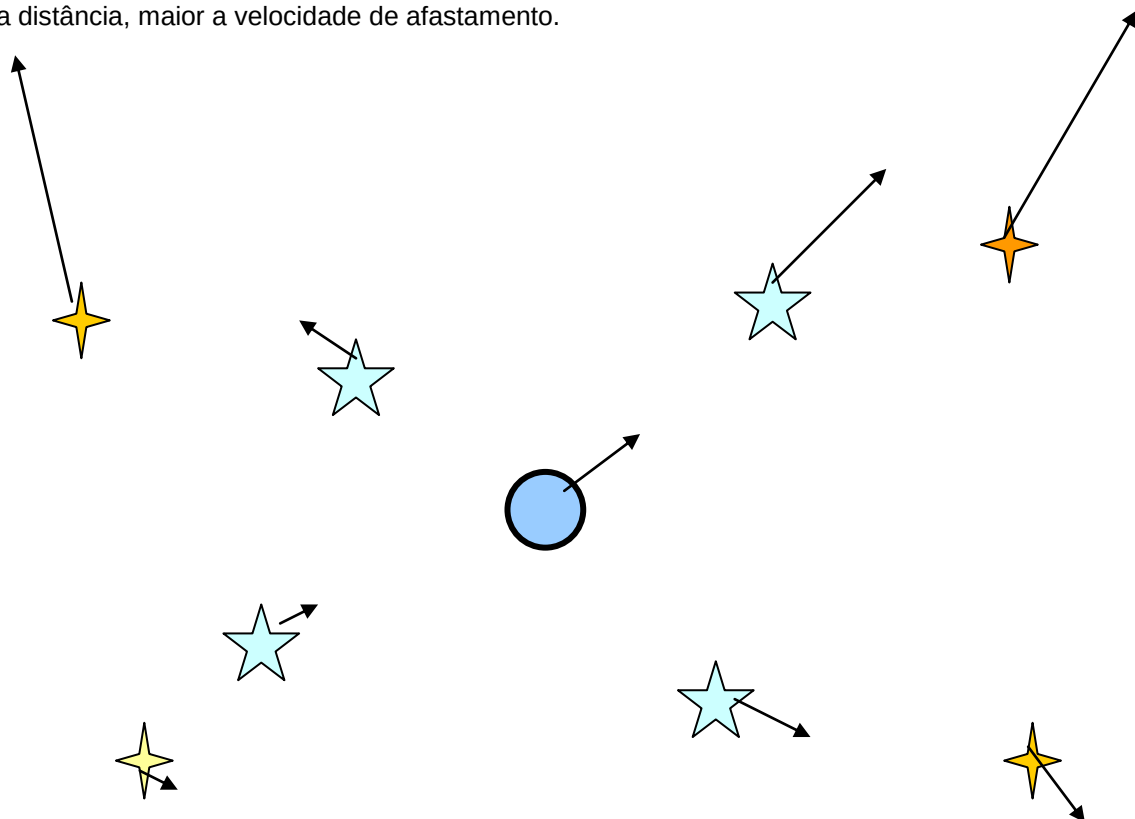
tempo futuro e voltar a se contrair. Isto depende da quantidade total de massa existente. Se a massa for menor que certo valor crítico, o Universo continuará em eterna expansão, ficando cada vez mais frio. Se a massa for maior que o valor crítico, a gravidade terá força suficiente para parar a expansão e fazê-lo contrair. Contrair para o quê? Um ponto de densidade infinita de energia. Acredita-se que nosso Universo começou com uma explosão de um ponto como este e como resultado de tal explosão, o Universo está em expansão. O futuro é uma incógnita!

LEI DE HUBBLE ($v = H d$)

Figuras 22 e 23. Desvio para o vermelho e expansão do universo.



Em 1930, Edwin Hubble descobriu que galáxias distantes estão se afastando de nós com velocidades proporcionais a suas distâncias. Isto levou à teoria de que o Universo está em expansão. Acima colocamos 3 estrelas do mesmo tipo em distâncias diferentes. A luz emitida por elas exibirá um espectro um pouco diferente e o deslocamento para o vermelho (redshift) será maior quanto maior for a distância da estrela. A causa desse “redshift” só pode ser o efeito Doppler e, portanto, quanto maior a distância, maior a velocidade de afastamento.



9. Bibliografia

1. *Geometria Euclidiana Plana*, João Lucas Marques Barbosa (Coleção Fundamentos da Matemática Elementar), Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1985.
2. *The Mathematica Experience*, Philip J. Davis e Reuben Hersh, Penguin Books, Birkhäuser Boston, 1981.
3. *Foundations of Euclidean and Non-Euclidean Geometry*, Richard L. Faber (Monographs and textbooks in pure and applied mathematics), 1983.
4. *Black Holes and Time Warps, Einstein's outrageous Legacy*, Kip S. Thorne, W.W. Norton and Company, New York, 1994.
5. *Gravity's Fatal Attraction, Black Holes in the Universe*, Mitchell Begelman and Martin Rees, Scientific American Library, New York, 1998.
6. *A Journey into Gravity and Spacetime*, John Archibald Wheeler, Scientific American Library, New York, 1999.
7. *Física Básica, Mecânica 1*, Pierre Lucie, Editora Campus Ltda, Rio de Janeiro, 1979.